Chapitre 27 : Vecteurs propres, valeurs propres, changement de base.

Je remercie Mathieu Mansuy dont la feuille suivante est très très fortement inspirée ! Les étoiles signalent la difficulté.

Matrices d'applications linéaires et changement de base

Exercice 1 (★) Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base du noyau et de l'image de chacune d'elles ainsi que leur rang et leur matrice dans les bases canoniques :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y-z, -x+2y+z) \end{array} \qquad i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y, 4x-y, -2x+2y+3z) \end{array} \qquad j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \mapsto & P(x+1)-P(x) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ P & \mapsto & P-(x+1)P' \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (★) Considérons la matice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M.
On considère les vecteurs $f_1 = (1,-1,0)$, $f_2 = (1,1,0)$ et $f_3 = (0,0,1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ et déterminer son inverse.
3. Soit $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de a, b et c.
4. Déterminer la matrice T de u dans la base $\mathscr{B}$.
5. En déduire T^n puis M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (★★) Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[x]$, qui à un polynôme P associe $\varphi(P) = (x^2-1)P' - 2xP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique, notée $\mathscr{B}_{can}$.
3. On pose $P_1 = (x+1)^2$, $P_2 = x^2-1$, $P_3 = (x-1)^2$. Montrer que $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, puis donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$.
4. En déduire la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de φ^n dans la base $\mathscr{B}$. En déduire la matrice de φ^n dans la base canonique.

Exercice 4 (★★) On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) = AM - MA$.
   a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ puis dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 5 (★★) On considère $F = \{(x, y, z) | x + y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(1, 1, 1)$.

1. a) Déterminer une base (e_1, e_2) de F et une base (e_3) de G.
   b) Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. On considère p le projecteur sur F parallèlement à G.
   a) Déterminer la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.
   b) En déduire la matrice de p dans la base canonique.
   c) Donner $p(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Soit q le projecteur sur G parallèlement à F. Déterminer $q(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 6 (★★★) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 7 (★★ - Interpolation de Lagrange) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On définit l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1},\ P \mapsto \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)).$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est un isomorphisme.
3. En déduire que pour tout $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que
   $\forall i \in \{0, \ldots, n\},\ Q(a_i) = b_i$.
4. a) Écrire la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
   b) En déduire que la *matrice de Vandermonde* $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.
5. Notons $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ la famille des polynômes de Lagrange associés aux réels $(a_0, \ldots, a_n)$.
   a) Calculer $\varphi(L_i)$.
   b) Retrouver alors que φ est un isomorphisme, et que $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 8 (★) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par

$$f(P) = -P''(1) + 2P'(1)(x-1) - 2P(1)(x-1)^2.$$

On pose $Q_1 = 1$, $Q_2 = x-1$ et $Q_3 = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$.

1. Vérifier que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que (Q_1, Q_2, Q_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ et déterminer la matrice de f dans cette base.
3. Montrer que 2 et -2 sont des valeurs propres de f et déterminer les dimensions des sous-espaces propres E_2 et E_{-2} associés.
4. L'endomorphisme f peut-il admettre d'autres valeurs propres ?
5. Montrer que $E_2 \oplus E_{-2} = \mathbb{R}_2[x]$ et déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ où la matrice de f est diagonale.

Exercice 9 (★) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

Montrer que $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \left\{\dfrac{1}{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}$, et que pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $E_\lambda(A) = E_{1/\lambda}(A^{-1})$.

Exercice 10 (★) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et $x \in E$, $x \neq 0_E$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathrm{Vect}(x) \text{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ est un vecteur propre de } f$$

Exercice 11 (★★ - Matrices stochastiques - D'après EML 2010) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Soit $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AV et en déduire une valeur propre de A.
2. Soit λ une valeur propre de A, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_i| = \max\limits_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$.
   a) Montrer que $|\lambda x_i| \leq |x_i|$.
   b) En déduire que $|\lambda| \leq 1$, et que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset [-1,1]$.

Exercice 12 (★★★ - QSP HEC 2012) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. Soit T l'application qui à toute fonction $f \in E$ associe la fonction $F = T(f)$ définie par : $F(0) = f(0)$ et $\forall x > 0$, $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?
2. Déterminer les réels λ et les fonctions f vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Exercice 13 (★★★★ - QSP HEC 2014) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.
2. Quelles sont les valeurs propres de f ?
3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?
4. Combien existe-t-il de plans vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

Recherche des éléments propres

Exercice 14 (★) Déterminer les éléments propres des matrices suivantes (on les étudiera dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ lorsque cela a un sens). On pourra vérifier ses calculs sur `Python` à l'aide de la commande `al.eig(A)` (de la librairie `numpy.linalg`) qui donne les valeurs propres d'une matrice `A`.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 (★) Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A et B ont même rang, même trace, mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.
2. Calculer $(A - 2I_4)^2$ et $(B - 2I_4)^2$. En déduire que les matrices A et B ne sont pas semblables.

Exercice 16 (★) Déterminer sans calcul les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 (★★★ - Oral HEC 2010) Soit $n \geq 2$, et soit M_n a matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $a \in \mathbb{R}$ est valeur propre de M_n si, et seulement si, a est racine du polynôme
$$P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1.$$
2. Déterminer alors le sous-espace propre associé à la valeur a.

Exercice 18 (★) Soit $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 19 (★★) Soit $n \geq 2$ et soit $J_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer $\mathrm{Sp}(J_n)$.
2. Montrer que J_n est semblable à une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.

Exercice 20 (★★) Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ et soit a un réel non nul. On note f l'application définie sur E par $f(P) = (x-a)P'$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de E. En déduire que f admet $n+1$ valeurs propres distinctes que l'on notera $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.
3. Soit P_k un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_k.
   a) Déterminer $\deg(P_k)$.
   Indication. On identifiera le coefficient dominant dans l'égalité $f(P_k) = \lambda_k P_k$.
   b) On note r_k l'ordre de multiplicité de a en tant que racine de P_k, et Q_k tel que $P_k = (x-a)^{r_k} Q_k$.
   Déterminer r_k et en déduire le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_k.

Exercice 21 (★★★) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés.

Valeurs propres et polynômes annulateurs

Exercice 22 (★)

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer $A^4 - 3A^3 + 4A$, et en déduire les éléments propres de A.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Chercher un polynôme annulateur de B. En déduire le spectre de B.

Exercice 23 (★★ - Matrices compagnons) Soit P un polynôme unitaire de degré 3 à cœfficients dans $\mathbb{R}$, qu'on note $P = x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0$.

On appelle *matrice compagnon du polynôme* P la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est un polynôme annulateur de M.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est une valeur propre de M si, et seulement si, λ est une racine de P.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{rg}(M - \lambda I_3) \geq 2$. En déduire que chaque sous-espace propre de M est de dimension 1.
4. **Exemples.** Déterminer un polynôme annulateur et les valeurs propres des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24 (★★★ - QSP HEC 2015) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$.

2. Soit Q un polynôme tel que $Q(f) = 0$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $P(f) = 0$.
   Montrer que toute racine réelle de Q est valeur propre de f.

Exercice 25 (★★★★ - Oral ESCP 2012) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre.
   Indication : On pourra commencer par remarquer que si P est un polynôme annulateur non nul de A, alors $\deg(P) \geq n$.
2. On note $\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad AM = MA\}$. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension supérieure ou égale à n.
3. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice $\Delta \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :
   $$A = P\Delta P^{-1}.$$
4. Soit $M \in \mathscr{C}$. Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M.
   En déduire que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.
   En déduire que $\mathscr{C}$ est de dimension inférieure ou égale à n.
5. Montrer que $(I, A, \ldots, A^{n-1})$ est une base de $\mathscr{C}$.
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{R} = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad M^2 = A\}$.
   a) Montrer que $\mathscr{R} \subset \text{Vect}(I, A)$.
   b) Montrer que $\mathscr{R}$ est de cardinal 4, et déterminer les 4 matrices M vérifiant $M^2 = A$.